

DOCUMENTOS DE TRABALHO

Nº 7

**NÃO LINEARIDADE E EFICIÊNCIA DO MERCADO FINANCEIRO:
EVIDÊNCIA PARA PORTUGAL^(*)**

ANTÓNIO AFONSO^()**

Instituto Superior de Economia e Gestão
R. Miguel Lúpi, 20
P - 1200 Lisboa, Portugal

e

Instituto de Gestão do Crédito Público
Av. Infante D. Henrique, 1 – C, 1º
P - 1100 Lisboa, Portugal

^(*) Este texto é uma nova versão, em português, com algumas alterações, de um artigo anterior em inglês [cfr. Afonso e Teixeira (1998)].

^(**) O autor agradece os comentários de Emanuel Santos a este texto e assume a total responsabilidade por qualquer erro que o mesma contenha.

Sumário

Este trabalho investiga a existência de dependência não linear em séries financeiras portuguesas, concretamente para as rentabilidades de índices de acções. Uma série pode apresentar dependência não linear mesmo que se tenha concluído que não existe dependência linear. A existência de dependência não linear iria contrariar o modelo do passeio aleatório e a hipótese da eficiência de forma fraca dos mercados financeiros. Utilizando observações diárias para o período entre 1990 e 1997 foram levados a cabo “testes de não linearidade” no sentido de averiguar se é possível aceitar a hipótese de eficiência de forma fraca. Os resultados parecem confirmar a existência de oportunidades de lucros anormais no mercado accionista português.

Abstract

This paper investigates the existence of non-linear dependence in Portuguese financial time series namely stock exchange indexes returns. Non-linear dependence may exist in a series even if we have already concluded for the lack of linear dependence. If present, non-linear dependence would contradict the random walk model and the financial markets weak form efficiency hypothesis. Using daily observations for the period 1990-1997 some so-called non-linearity tests are performed in order to decide whether we can accept the weak form efficiency hypothesis. The results seem to confirm the existence of exploitable excess profit opportunities in the Portuguese stock market.

Classificação do JEL: C14, G14.

Palavras chave: testes de não linearidade, mercado de capitais, eficiência, Portugal.

ÍNDICE

1 - Introdução	2
2 - Análise preliminar dos dados	4
2.1 – Factos estilizados sobre os índices de acções portuguesas	4
2.2 – Ajustamento de um modelo ARIMA	6
3 - Testes de não linearidade	7
3.1 – Teste de Engle	8
3.2 – Teste de Tsay	9
3.3 – Teste de biespectro de Hinich	10
3.4 – Expoente de Lyapunov	11
3.5 – Teste da estatística BDS	12
4 - Resultados empíricos	15
5 - Conclusões	19
Bibliografia	20
Anexo	23

No matter how we try to make it so, the world is not orderly: nature is not orderly, nor are the human creations called institutions. Economies and the capital markets are particularly lacking in orderliness. The capital markets are our own creation; yet we do not understand how they work. (...) current capital market theory is based on a linear view of the society. (...) However, people, and nature in general are nonlinear.

EDGAR PETERS

Chaos and Order in the Capital Markets (1996)

1 - Introdução

Um mercado financeiro eficiente pode ser caracterizado pelo facto de não exibir qualquer padrão determinístico. A eficiência do mercado pressupõe a ausência de oportunidades de pura arbitragem e a impossibilidade de se obterem lucros através do uso de dados históricos. A validação da eficiência baseia-se por vezes em testar se o processo gerador das rentabilidades de um determinado activo financeiro é determinístico (evidência contra a eficiência de mercado) ou estocástico (evidência a favor da eficiência de mercado).

Vários trabalhos empíricos sobre a forma fraca de eficiência dos mercados financeiros recorrem à utilização de testes de sequência (*run tests*) ou aos testes baseados nas autocorrelações. Normalmente aceita-se a existência de independência linear para uma série P (por exemplo cotações de uma acção ou preço de um índice) quando essa série é gerada por um modelo de passeio aleatório, dado por, em termos logarítmicos,

$$\log P_t = C + \log P_{t-1} + u_t \quad (1)$$

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

onde u_t é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída (iid), habitualmente referida como “ruído branco”, com média nula e variância finita, sendo C uma constante. Caso exista evidência de que $\log P$ segue um passeio aleatório ficam criadas condições para aceitar a hipótese de eficiência de forma fraca para as rentabilidades as quais, sendo a variação do logaritmo dos preços, são então imprevisíveis.¹

Seguindo o processo logarítmico dos preços um passeio aleatório então, as rentabilidades presentes e passadas R_t ,

$$R_t = \log P_t - \log P_{t-1}, \quad (2)$$

não estão associadas com as rentabilidades futuras e não terão qualquer poder para prever os valores futuros de R . A independência dos vários valores de R_t implicaria a existência de um mercado eficiente, numa vertente de forma fraca, pelo que os métodos de sucessões cronológicas univariadas não seriam bem sucedidos na tentativa de capturar os padrões do processo gerador das rentabilidades.

Todavia, mesmo que não exista dependência linear isso não significa que não exista dependência não linear. Quando presente, a dependência não linear contradiz o modelo do passeio aleatório bem como a hipótese da eficiência de forma fraca dos mercados financeiros. Avaliar se os coeficientes de autocorrelação não são estatisticamente diferentes de zero não é pois suficiente, tornando-se necessário testar igualmente a não linearidade das rentabilidades.

Brock, Hsieh e LeBaron (1991) referem vários testes de não linearidade.² Numa tentativa de validar a hipótese de eficiência de forma fraca vão ser usados o teste de

¹ Fama (1991) apresenta um valioso resumo sobre a teoria da eficiência dos mercados de capitais bem como vários resultados empíricos.

² Outros testes para detectar a presença de não linearidade são usados por Lee, White e Granger (1993) e Brooks (1996).

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

Engle, o teste de Tsay, o teste de biespectro de Hinich, o expoente de Lyapunov e a estatística BDS.³

Na próxima secção são introduzidos os dados a utilizar, referem-se os principais dados estatísticos para as séries e ajusta-se um modelo ARIMA para cada uma das séries. Na secção três são apresentados de forma resumida os testes utilizados neste trabalho, a secção quatro apresenta os resultados empíricos e a secção cinco conclui o artigo.

2 - Análise preliminar dos dados

A hipótese habitualmente assumida na teoria financeira de que os preços variam aleatoriamente e que as rentabilidades são variáveis independentes e identicamente distribuídas, seguindo uma distribuição normal, é útil se bem que algo irrealista.⁴ A principal razão para essa suposição prende-se com o facto de a distribuição normal ser caracterizada por apenas dois parâmetros: a média e o desvio padrão. Com efeito, existe um largo consenso entre a profissão sobre alguns factos estilizados relativamente às propriedades estatísticas das rentabilidades das séries financeiras. Por exemplo, é ponto assente que a distribuição dos rendimentos não é normal apresentando pelo contrário abas mais largas do que as de uma distribuição normal (a distribuição é leptocúrtica). Taylor (1986) passa em revista estas questões.

2.1 - Factos estilizados sobre os índices de acções portuguesas

Neste estudo são analisadas três séries financeiras: o índice BVL Geral (da Bolsa de Valores de Lisboa), o índice PSI20 (Portuguese Stock Index 20, da Bolsa de Derivados do Porto) e o índice BVL30. Trata-se de índices compósitos que reflectem as variações do mercado de capitais português. Tendo em conta que o mercado de capitais

³ Al-Lougahni e Chappell (1996) chamam a este teste um “teste novo” por oposição aos testes de autocorrelação e de sequência.

⁴ Afonso (1997) apresenta resultados sobre a ausência de normalidade para os índices accionistas do mercado de capitais em Portugal.

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

em Portugal ainda carece de alguma profundidade, as cotações das acções não serão em princípio uma boa base de análise.

Os dados disponíveis permitem a utilização de mais de 1700 observações diárias para o BVL Geral e cerca de 1200 observações diárias para o PSI20 e para o BVL30.⁵ O horizonte temporal de cada série bem como os seus principais dados estatísticos, são apresentados no Quadro 1. As três séries podem também ser visualizadas nos Gráficos 1, 2 e 3 (todos os gráficos são apresentados no Anexo).

Quadro 1

Dados estatísticos para o BVLG, o PSI20 e o BVL30

ÍNDICE	PERÍODO		N	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
	Início	Fim					
BVLG	1990-01-10	1998-01-06	1793	909.17	333.88	537.20	2014.53
PSI20	1993-01-04	1998-01-06	1239	4764.17	1405.29	2917.56	9294.05
BVL30	1993-01-05	1998-01-06	1238	1922.99	672.32	980.14	3992.42

Nota: N é o número de observações na amostra.

O Quadro 2 apresenta alguns dados estatísticos para os rendimentos diários dos índices. As rentabilidades logarítmicas estão representadas nos Gráficos 4, 5 e 6.

Quadro 2

Dados estatísticos para as rentabilidades do BVLG, PSI20 e BVL30

ÍNDICE	N	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Achatamento
BVLG	1792	0.00059692	0.0067877	-0.059529	0.075718	0.62951	21.2378
PSI20	1238	0.00091338	0.0080675	-0.070627	0.069413	-0.35051	14.6280
BVL30	1237	0.00111920	0.0076165	-0.068987	0.063209	0.28656	15.3008

⁵ O leitor deverá ter presente que até Novembro de 1997 o mercado de capitais Português estava incluído na categoria dos mercados emergentes. Desde 2 de Dezembro de 1997 a Bolsa de Valores de Portugal passou a ser incluída no índice Morgan Stanley Capital Index para mercados desenvolvidos.

Todas as três séries dos rendimentos evidenciam sinais de desvio face à hipótese de normalidade, já que os coeficientes de assimetria (*skewness*) e de achatamento (*kurtosis*) são estatisticamente diferentes dos de uma distribuição normal.⁶ As três séries são leptocúrticas e apresentam abas assimétricas: o PSI20 apresenta assimetria negativa e quer o BVLG quer o BVL30 apresentam assimetria positiva.⁷

2.2 - Ajustamento de um modelo ARIMA

Tendo em conta que alguns dos testes de não linearidade podem ser aplicados aos resíduos resultantes do ajustamento de um modelo linear, procurou-se ajustar numa primeira fase um destes modelos.

Através da metodologia Box-Jenkins estimou-se um processo ARIMA (*autoregressive integrating moving average*) para cada uma das séries das rentabilidades logarítmicas dos três índices bolsistas. Muito resumidamente ajustou-se um modelo ARIMA (p, d, q), onde p é o número de termos autoregressivos, d é o número de vezes que a série foi diferenciada para ser estacionária e q é o número de termos de média móvel.⁸

A análise visual pode ser útil (ver Gráficos 4, 5 e 6 no Anexo) para avaliar preliminarmente se as séries são estacionárias. Com efeito, a metodologia Box-Jenkins aplica-se apenas a séries estacionárias ou seja, a séries com uma média e uma variância essencialmente constantes ao longo do tempo. Após a análise dos correlogramas das funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial foram identificados modelos ARIMA (0, 1, 3) para as rentabilidades das três séries originais. Utilizando o operador de atraso L, ou seja,

$$LX_t = X_{t-1}, \quad (3)$$

⁶ No caso de uma distribuição normal deverá ter-se um valor de zero para o coeficiente de assimetria e um valor de três para o coeficiente de achatamento.

⁷ Note-se que se ao valor do coeficiente de achatamento se subtrair o achatamento de uma distribuição normal e o resultado for positivo (negativo), isso será sinónimo do comportamento leptocúrtico (platocúrtico) da série.

⁸ Ao contrário por exemplo de Brooks (1996) não se restringiu aqui a especificação linear a um formato puramente autoregressivo.

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

os modelos ARIMA seleccionados assumem a forma

$$(1 - L)Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \theta_3 L^3)u_t \quad (4)$$

onde Y é a primeira diferença do logaritmo natural da série original, θ_1 , θ_2 e θ_3 são os coeficientes de média móvel, assumindo-se ainda que o choque aleatório u_t é uma variável aleatória iid com média nula e variância constante.

O Quadro 3 apresenta os principais resultados dos modelos estimados, as quais satisfazem as condições de estacionaridade e de invertibilidade.⁹

Quadro 3

Modelos ARIMA para os rendimentos diários dos índices bolsistas

Índice	Modelo		θ_1	θ_2	θ_3
BVLG	ARIMA(0,1,3)	Coeficiente	0.802075	0.137213	0.050019
		Estatística t	33.97	4.55	2.12
PSI20	ARIMA(0,1,3)	Coeficiente	0.791847	0.133191	0.067637
		Estatística t	27.91	3.69	2.38
BVL30	ARIMA(0,1,3)	Coeficiente	0.799907	0.106930	0.08518
		Estatística t	23.18	2.94	2.99

Nota: θ_i é o parâmetro de média móvel para o desfasamento i .

Os resíduos dos modelos ARIMA poderão então ser usados adiante no cálculo de testes de não linearidade.

3 - Testes de não linearidade

Nesta secção faz-se uma breve apresentação teórica dos chamados testes de não linearidade. Os primeiros dois testes destinam-se a detectar não linearidade subjacente aos resíduos de um modelo AR(p). O número de desfasamentos foi determinado usando o critério SBIC (*Schwarz Bayesian Information Criterion*).

⁹ Estes modelos são estacionários uma vez que não têm qualquer termo autorregressivo. As condições de invertibilidade requerem $|\theta_i| < 1$ para qualquer i .

3.1 - Teste de Engle

Os modelos ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*) foram desenvolvidos por Engle (1982) que também propôs um teste cujo objectivo seria examinar a existência de não linearidade no segundo momento. Na sua forma mais simples um processo ARCH (p) pode ser formalmente escrito como

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t) \quad (6)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 . \quad (7)$$

A hipótese nula de não existência de autocorrelação na variância do erro é dada por $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, a qual, caso seja aceite, permitiria negar a existência de um processo ARCH (p). O procedimento para testar esta hipótese é o seguinte:

1. Fazer a regressão linear de Y_t em X_t (caso se limite o conjunto de informação, X_t , às observações passadas de Y_t então estima-se simplesmente um processo AR (p)) e guardar os resíduos estimados $\hat{\varepsilon}_t$.

2. Fazer a regressão dos quadrados dos resíduos estimados $\hat{\varepsilon}_t^2$ numa constante e em p desfasamentos dos valores de $\hat{\varepsilon}_t^2$ ou seja

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + \hat{\eta}_t \quad (8)$$

e guardar os resíduos estimados $\hat{\eta}_t$.

3. Calcular o R^2 da segunda regressão e testar a hipótese nula usando a estatística nR^2 , a qual segue uma distribuição $X^2(p)$ segundo a hipótese nula de ausência de dependência ARCH.

3.2 – Teste de Tsay

Enquanto que o teste de Engle examina a existência de não linearidade na variância o teste de Tsay (1986) investiga a existência de não linearidade na média.¹⁰ O procedimento para calcular o teste proposto por Tsay é o seguinte:

1. Fazer a regressão linear de Y_t em X_t (na prática, se o conjunto de informação X_t for limitado às observações passadas de Y_t , estima-se um processo AR) e guardar os resíduos estimados $\hat{\varepsilon}_t$.
2. Para cada observação de Y_t construir o vector Z_t dos produtos cruzados das observações históricas ou seja, $Y_{t-i}Y_{t-j}$ para $i, j = 1, \dots, p$ onde $i \geq j$. Por exemplo se $p = 2$ então $Z_t = [Y_{t-1}^2, Y_{t-1}Y_{t-2}, Y_{t-2}^2]^T$ (note-se que o vector Z_t tem $p(p+1)/2$ elementos).
3. Fazer a regressão de vector Z_t nas variáveis explicativas e guardar os resíduos estimados $\hat{\eta}_t$.
4. Fazer a regressão dos resíduos estimados $\hat{\varepsilon}_t$ em $\hat{\eta}_t$

$$\hat{\varepsilon}_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{\eta}_{t-1} + \delta_2 \hat{\eta}_{t-2} + \dots + \delta_p \hat{\eta}_{t-p} + \hat{\xi}_t \quad (9)$$

e guardar os resíduos estimados $\hat{\xi}_t$.

5. Calcular a estatística do teste de Tsay

$$\hat{F} = \frac{(\hat{\varepsilon}^T \hat{\eta})^T (\hat{\eta}^T \hat{\eta})^{-1} (\hat{\eta}^T \hat{\varepsilon}) / m}{(\hat{\xi}^T \hat{\xi}) / (n - p - m - 1)}, \quad (10)$$

onde $m = p(p+1)/2$ e testar a hipótese nula

$$H_0: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_p = 0.$$

Tsay (1986) mostrou que a estatística em questão, equação (10), tem uma distribuição $F(m, n-p-m-1)$ segundo a hipótese nula e é sensível a desvios de linearidade em relação à média.

¹⁰ Guarda e Salmon (1996) apresentam vários outros testes que investigam a existência de não linearidade na média.

3.3 - Teste de biespectro de Hinich

O teste de biespectro de Hinich é usado para estimar o biespectro de uma série estacionária e fornece um teste directo de não linearidade bem como um teste directo de normalidade (*Gaussianity*). Caso o processo gerador dos dados (neste caso das taxas de rendimento) seja linear então a assimetria (*skewness*) do biespectro é constante. Caso o teste conduza à rejeição da assimetria constante então isso permite assumir que está implícito nos dados um processo não linear.¹¹

A linearidade e a normalidade podem ser testadas usando um estimador amostral da função de assimetria $\Gamma(w_1, w_2)$ com

$$\Gamma^2(w_1, w_2) = \frac{|B_{.xxx}(w_1, w_2)|^2}{S_{.xx}(w_1)S_{.xx}(w_2)S_{.xx}(w_1 + w_2)}. \quad (11)$$

onde $S_{.xx}(w)$ é o biespectro de $x(t)$ na frequência w . O biespectro para a frequência dos pares (w_1, w_2) é definido como

$$B_{.xxx}(w_1, w_2) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{.xxx}(r, s) e^{[-i2\pi(w_1 r + w_2 s)]} \quad (12)$$

no domínio principal dado por $\Omega = \{(w_1, w_2): 0 < 0.5, w_2 < w_1, 2w_1 + w_2 < 1\}$.

A hipótese nula do teste de “linearidade” de Hinich é de facto dada por

H_0 : função de assimetria plana (*flat*), ausência de dependência não linear de

¹¹ Detalhes sobre o método de estimação do biespectro podem ser encontrados nomeadamente em Hinich (1982), Hinich e Patterson (1985), Ashley, Patterson e Hinich (1986) bem como em Barnett, Gallant, Hinich, Jungeilges, Kaplan e Jensen (1996).

sendo H_0 rejeitada caso a estatística de teste Z , normal *standard*, seja grande, maior do que dois ou três. Quando a hipótese nula é a normalidade a estatística de teste H também é normal *standard*.

3.4 – Expoente de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de variação exponencial à qual duas órbitas próximas se distanciam uma da outra. Fornecem uma estimativa da dependência sensível das condições iniciais, uma característica típica do caos.¹² Pressupõe-se basicamente que quando se admitem pequenas perturbações ao estado inicial de um sistema este evolui a uma taxa de crescimento exponencial.

Considerem-se dois pontos, x_0 e $x_0+\varepsilon$, distanciados um do outro por apenas uma diferença infinitesimal ε e aplique-se uma função de correspondência a cada um dos dois pontos n vezes.¹³ A diferença entre os resultados é dada por

$$d_n = e^{n\lambda(x_0)} \varepsilon \quad (13)$$

e após resolver para a taxa de convergência (ou de divergência) λ tem-se a seguinte expressão para o expoente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{d_n}{\varepsilon} \right|. \quad (14)$$

Quando um sistema tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo então esse sistema é caótico e trajectórias que se iniciam em dois estados semelhantes, tenderão a divergir exponencialmente. Quanto maior for o expoente positivo dominante mais caótico é o sistema e mais curto é o intervalo de previsibilidade do sistema. Um

¹² Mendes (1998) apresenta alguns exemplos sobre o fenómeno da dependência sensível das condições iniciais.

¹³ Neste tópico a notação é semelhante à usada por Barnett, Medio e Serletis (1997).

expoente positivo de Lyapunov pode pois ser encarado como “uma definição operacional de comportamento caótico”.¹⁴

Num artigo de alguma forma pioneiro Wolf, Swift e Vastano (1985) estimaram o maior expoente de Lyapunov através de uma média das taxas de divergência das órbitas observadas. Alguns autores argumentam todavia que este método é menos apropriado quando se está perante sistemas com ruído. Nesse sentido McCaffrey, Ellner, Gallant e Nychka (1992) e Nychka, Ellner, McCaffrey e Gallant (1992) utilizaram uma aproximação alternativa baseada em métodos jacobianos de forma a evitar enviesamento positivo aquando da estimação dos expoentes de Lyapunov.¹⁵

3.5 – Teste da estatística BDS¹⁶

O teste da estatística BDS apenas pode ser usado para produzir indirectamente evidência sobre não linearidade já que a distribuição da estatística do teste não é conhecida. Esta estatística é usada para testar padrões que ocorrem mais (ou menos) frequentemente do que o esperado para dados independentes. O teste da BDS pode ser usado para testar a existência de dependência não linear nos resíduos de um modelo ARIMA, estimado segundo a metodologia Box-Jenkins. A hipótese nula pode ser formulada como

H_0 : ruído branco, dados independentes, dados gerados por um processo estocástico iid, eficiência;

H_1 : dependência não linear, ausência de eficiência,

sendo H_0 rejeitada quando a estatística BDS for grande (o que significa maior do que 2 ou 3).

¹⁴ Tal como referem (minha tradução) Abhyankar, Copeland e Wong (1995).

¹⁵ S. Ellner, D. W. Nychka e A. R. Gallant desenvolveram o *software* LENNS (Lyapunov Exponent of Noisy Nonlinear Systems), um programa que também estima o expoente dominante de Lyapunov e permite testar a existência de caos. Infelizmente não foi possível obter uma versão executável desse *software*.

¹⁶ O teste BDS (Brock-Dechert-Scheinkman) tem o nome dos seus autores: William A. Brock, W. Davis Dechert and J. A. Scheinkman.

A estatística BDS é um teste não paramétrico para avaliar a hipótese nula de que uma série $\{x_t, t = 1, \dots, n\}$ é independente e identicamente distribuída contra uma alternativa não especificada. O teste é efectuado examinando a estrutura de probabilidade de $\{x_t\}$ subjacente de forma a procurar qualquer outra forma de dependência. Habitualmente referido como um teste de não linearidade, o teste da BDS pode ser usado para detectar qualquer desvio face a uma situação de independência mesmo que tal seja devido à presença de dependência não linear nos dados.

Definindo o integral de correlação, dado pela equação (15), como uma medida da fracção dos pares de pontos (x_t^m, x_s^m) que na série se situam a uma distância de ε (*metric bound*) um do outro:

$$C_m^n(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{s=i+1}^N I(x_t^m, x_s^m) \tag{15}$$

com,

$$I(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{if } \|a - b\| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{16}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma ($L_\infty = \max\{|a|\}$) e

$$N = n - m + 1;$$

n – número de observações e

m – coeficiente de mergulho (*embedding dimension*).

Na literatura x_t^m é habitualmente referida como a história- m e pode ser genericamente escrita como $x_t^m = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1})$. Por exemplo, com $m = 2$, as três primeiras histórias serão: (x_t, x_{t+1}) , (x_{t+1}, x_{t+2}) e (x_{t+2}, x_{t+3}) . Observe-se que como a

primeira e a terceira histórias não têm qualquer elemento comum se podem denominar como histórias não sobrepostas.

Caso os dados sejam gerados por um processo estocástico estritamente estacionário, perfeitamente regular, então a equação (15) também pode ser escrita como

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_m^n(\varepsilon) = \int_{r^m} \int_{r^m} I(a,b) dF_m(a) dF_m(b) \quad (17)$$

tendo Brock, Dechert, Sheinkman e LeBaron (1991) demonstrado que se $\{x_t\}$ é iid então tem-se $C_m(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^m$.

A estatística BDS será dada por

$$W_m^n(\varepsilon) = \frac{\sqrt{N} (C_m^n(\varepsilon) - (C_1^n(\varepsilon))^m)}{\sigma_m(\varepsilon)}, \quad (18)$$

onde $W_m^n(\varepsilon)$ converge em distribuição para uma normal *standard* $N(0,1)$, à medida que n tende para infinito.¹⁷ Brock, Hsieh e LeBaron (1991) mostram que a distribuição normal é assintoticamente uma boa aproximação para a distribuição da estatística BDS quando se dispõe de mais de 500 observações.

É conveniente ter em atenção que a estatística BDS depende, em grande medida, da escolha dos valores de ε e de m . Com ε grande (pequeno) a correlação espacial entre os pontos da série tende a ser elevada (reduzida). Quanto maior for o coeficiente de mergulho mais pequeno será o número de histórias não sobrepostas e, como consequência, os pontos definidos pelos vectores implícitos ficarão mais “próximos” e o valor da estatística BDS tenderá a ser maior. Para um valor absoluto elevado da estatística rejeita-se a hipótese nula iid (aleatoriedade) já que neste caso há evidência de os dados serem não lineares.

¹⁷ As propriedades estatísticas do teste da estatística BDS foram estudadas nomeadamente por Brock e Baek (1991), Brock, Dechert e Sheinkman (1991), Brock, Hsieh e LeBaron (1991), Hsieh (1991) e Scheinkman e LeBaron (1989).

4 – Resultados empíricos

É possível que exista dependência não linear nas rentabilidades dos índices financeiros. No sentido de validar essa hipótese efectuaram-se vários testes de forma a detectar uma possível não linearidade subjacente aos dados. No caso da estatística BDS este teste será aplicado aos resíduos dos processos ARIMA, assumindo-se que estes modelos já extrairam toda a linearidade possível dos dados.

Resultados dos testes de Engle e de Tsay

Após se ter seleccionado o modelo AR(p) adequado, um modelo AR(1) para os três índices bolsistas (seguiu-se a indicação do critério SBIC), afectuaram-se os dois testes sobre os resíduos dos modelos AR(1). Os resultados são apresentados no Quadro 4 e permitem rejeitar a hipótese nula em ambos os casos. Ou seja, pode-se concluir pela ausência de um modelo ARCH (1) usando o teste de Engle (poderá haver não linearidade na variância), podendo igualmente aceitar-se a hipótese de existir não linearidade na média, usando o teste de Tsay.¹⁸

Quadro 4
Testes de Engle e de Tsay

	ARCH			Tsay		
	Estatística de teste	<i>p-value</i>	Graus de liberdade	Estatística de teste	<i>p-value</i>	Graus de liberdade
BVLG	146.99	0.0000	1	8.82	0.0030	(1, 1789)
PSI20	207.80	0.0000	1	14.71	0.0001	(1, 1235)
BVL30	228.94	0.0000	1	12.49	0.0004	(1, 1234)

Resultados do teste de Hinich

Sem recorrer a uma filtragem prévia e usando as primeiras diferenças do

¹⁸ Teixeira (1997) chegou a resultados semelhantes para o índice BVLG usando modelos AR(1) e AR(2) para o teste de Engle e modelos AR(2) e AR(24) para o teste de Tsay.

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

logaritmo natural dos índices bolsistas procedeu-se ao cálculo do teste de Hinich. Não se efectuou aquele passo prévio pois Ashley, Patterson e Hinich (1986) demonstraram que o teste de Hinich é invariante a processos de filtragem linear. Caso a série original seja não linear então a não linearidade acabaria por passar através do filtro linear para os resíduos.

Os resultados do Quadro 5 levam à rejeição da hipótese de linearidade com base no teste de Hinich, fornecendo indícios sobre a não linearidade dos rendimentos dos índices e permitindo assim não aceitar a hipótese de eficiência de forma fraca.¹⁹

Todavia, mesmo que não se rejeite a hipótese nula de linearidade, deve-se ter em consideração, tal como referem Barnett, Gallant, Hinich, Jungeiles e Jensen (1997), que “acceptance of the null of linearity (...) provides only weak support for the linearity, since the [Hinich] test, as currently constructed, actually tests the broader null of absence of third order nonlinear dependence”.²⁰

Quadro 5
Teste de Hinich

Índices	Teste de normalidade (H)	Teste de linearidade (Z)	Conclusão
BVLG	9,14	3,97	Rejeitar normalidade e linearidade
PSI20	8,96	2,71	Rejeitar normalidade e linearidade
BVL30	8,77	2,35	Rejeitar normalidade e linearidade

Nota: os testes são unilaterais e a hipótese nula é rejeitada em ambos os casos se a estatística de teste é superior a 2 ou 3. Tal como sugerido por Hinich (1982) o parâmetro de alisamento do biespectro escolhido foi a raiz quadrada (aproximadamente) do número de observações.

¹⁹ Os cálculos foram efectuados com um programa desenvolvido por D. M. Patterson (Bispectrum Estimation Program, Version 5.11, Setembro de 1992).

²⁰ O interessante *survey* de Barnett, Gallant *et al.* (1997) relativo à não linearidade e a testes para o caos pode ser encontrado em <http://wuecon.wustl.edu/~barnett/Papers.html>.

Estimativas dos expoentes de Lyapunov

O Quadro 6 apresenta as estimativas do maior expoente de Lyapunov, para os rendimentos logarítmicos das séries, usando o método de estimação de Wolf *et al.* (1985).²¹ Os expoentes de Lyapunov foram calculados com dimensões implícitas (*embedding dimensions*) até cinco o que, considerando os dados disponíveis, já supera o valor sugerido por Wolf (1991).

Quadro 6
Expoentes de Lyapunov para os rendimentos logarítmicos

Ndim	max λ		
	BVLG	PSI20	BVL30
1	0.0144	0.0216	0.0120
2	0.0155	0.0130	0.0282
3	0.0204	0.0135	0.0205
4	0.0291	0.0168	0.0144
5	0.0136	0.0099	0.0167

Notas: max λ - máximo expoente de Lyapunov estimado;
ndim – coeficiente de mergulho (*embedding dimension*).

Os resultados, todos os λ são positivos, parecem apontar para a definição operacional de caos referida atrás: trajetórias que se iniciam em dois vectores de estado quase idênticos divergem exponencialmente à medida que o tempo passa, permitindo que se aceite a hipótese de caos para as três séries financeiras em apreço.

Quando existe caos, uma das implicações é a possibilidade de existirem estratégias de negociação rentáveis baseadas na não linearidade, pelo menos no curto prazo. A questão seria pois determinar o mecanismo gerador de forma a aproveitar as ineficiências dos mercados financeiros.

²¹ Os expoentes de Lyapunov foram calculados com um programa desenvolvido e distribuído por A. Wolf (programas BASGEN e FET, 1991). Estes programas podem ser obtidos na página de A. Wolf na Internet, <http://www.users.interport.net/~wolf/>, num ficheiro comprimido e autoexecutável. Wolf (1991) fornece igualmente indicações valiosas sobre a melhor forma de utilizar aqueles programas.

O teste da estatística BDS

Para o cálculo da estatística BDS Brock, Hsieh e LeBaron (1991) recomendam usar um valor para ϵ entre metade e duas vezes o desvio padrão dos dados originais ($0,5\sigma \leq \epsilon \leq 2\sigma$) sugerindo igualmente um valor de $m = 2$. Com amostras de dimensão inferior a 500 observações o valor de m deve ser menor ou igual a 5.

O Quadro 7 apresenta os resultados do teste da estatística BDS para os resíduos do modelo ARIMA dos rendimentos logarítmicos.²² Pode-se observar que a hipótese nula de as rentabilidades serem iid é rejeitada, ao nível de 5 por cento, para todos os índices.

Quadro 7
Estatísticas BDS
Resíduos do modelo ARIMA aplicado aos rendimentos logarítmicos

ÍNDICE	m	ϵ			
		$0,5\sigma$	σ	$1,5\sigma$	2σ
BVLG	2	14.719	15.292	13.438	12.064
	3	18.322	17.763	14.765	12.933
	4	20.876	19.319	15.644	13.424
	5	24.284	21.014	16.187	13.527
PSI20	2	12.178	10.729	10.045	10.450
	3	15.219	12.513	10.693	10.550
	4	18.407	14.128	11.404	10.834
	5	22.656	15.792	12.065	10.929
BVL30	2	11.306	10.615	9.765	9.687
	3	14.518	12.297	10.268	9.793
	4	17.503	13.905	10.076	10.256
	5	21.379	15.583	11.735	10.376

Notas: m – coeficiente de mergulho (*embedding dimension*); ϵ - distância entre pontos, medida em termos do número de desvios padrão dos dados originais; σ - desvio padrão. Todas as estatísticas são significativas ao nível de 5 por cento.

Por outras palavras, não se pode aceitar a ausência de dependência não linear

²² As estatísticas BDS foram calculadas com um programa desenvolvido por William Dechert (BDS STATS, versão 8.20). O leitor interessado pode tentar obter o programa BDS a partir da página <http://www.ssc.wisc.edu/~lebaron/software/index.html> ou, em alternativa, a partir da página [gopher://gopher.ssc.wisc.edu/00/econgopher/software/bds/dos](http://gopher.ssc.wisc.edu/00/econgopher/software/bds/dos).

para as rentabilidades sendo por isso mais uma vez impossível validar, para todos os índices, a hipótese de eficiência de forma fraca.²³

5 - Conclusões

A hipótese de linearidade é rejeitada por todos os testes efectuados neste trabalho. Com efeito, os resultados permitem rejeitar a hipótese nula de que as rentabilidades dos índices bolsistas portugueses são iid. Existe provavelmente dependência não linear nas rentabilidades contradizendo assim a suposição do passeio aleatório. Os resultados dos testes, ao deixarem a ideia de que há não linearidades nos dados, abrem a possibilidade de poderem existir no mercado accionista português oportunidades de lucros anormais.

Estas conclusões são consistentes com os resultados de Omran (1997) para o Reino Unido e com os de de Lima (1995) para os Estado Unidos, argumentando os autores que após o *crash* de 1987 existe dependência não linear nas rentabilidades das acções.

Como se viu, os resultados parecem desafiar a ideia de que as rentabilidades diárias podem ser tratadas como variáveis aleatórias independentes. Com efeito, essas rentabilidades podem ser potencialmente previsíveis. Ainda assim, a opção de concluir com base nos chamados “testes de não linearidade” que os mercados financeiros são ineficientes implica sempre uma assunção muito forte. Abhyankar, Copeland e Wong (1995) referem que a estrutura não linear pode ser consistente com a falta de eficiência se houver neutralidade face ao risco e custos de transacção negligenciáveis.

²³ Estes resultados confirmam as conclusões de trabalho anterior já levado a cabo por Afonso e Teixeira (1997) relativamente a índices sectoriais da Bolsa de Valores de Lisboa.

Bibliografia

Abhyankar, A.; Copeland, L. S. e Wong, W. (1995), “Nonlinear Dynamics in Real-Time Equity Market Indices: Evidence from the United Kingdom”, *The Economic Journal*, Vol. 105, N° 431, July, 864-880.

Afonso, A. (1997), “Normality and Efficiency in Portuguese Stock Exchange Indexes”, Março, *Estudos de Economia*, Vol. XVI-XVII, Inverno, 101-106.

Afonso, A. e Teixeira, J. (1997), “Efficiency in Portuguese Stock Exchange Indexes: Runs Tests and BDS Statistics”, Documento de Trabalho N° 2/97, Departamento de Economia, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.

Afonso, A. e Teixeira, J. (1998), “Non-linear Tests of Weakly Efficient Markets: Evidence from Portugal”, Documento de Trabalho N° 6/98, Departamento de Economia, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.

Al-Loughani, N. e Chappell, D. (1996), “On the Validity of the Weak Form Efficient Markets Hypothesis Applied to the London Stock Exchange”, *Applied Financial Economics*, Vol. 7, N° 2, Abril, 173-176.

Ashley, R. A.; Patterson, D. M. e Hinich, M. J. (1986), “A Diagnostic Test for Nonlinear Serial Dependence in Time Series Fitting Errors”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 7, N° 3, 165-178.

Barnett, W. A.; Gallant, A. R.; Hinich, M. J.; Jungeilges, J.; Kaplan, D. e Jensen, M. J. (1996), “An Experimental Design to Compare Tests of Nonlinearity and Chaos”, in *Nonlinear Dynamics and Economics*. Eds. William Barnett, Alan Kirman e Mark Salmon. Cambridge. Cambridge U. Press.

Barnett, W. A.; Medio, A. e Serletis, A. (1997), “Nonlinear and Complex Dynamics in Economics”, *mimeo*.

Barnett, W. A.; Gallant, A. R.; Hinich, M. J.; Jungeilges, J.; Kaplan, D. e Jensen, M. J. (1997), “A Single-Blind Controlled Competition Among Tests for Nonlinearity and Chaos”, *Journal of Econometrics* (a sair).

Brock, W. A. e Baek, E. G. (1991), “Some Theory of Statistical Inference for Nonlinear Science”, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, 697-716.

Brock, W. A.; Hsieh, D. A. e LeBaron, B. (1991), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and*

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

Instability: Statistical Theory and Economic Evidence, The MIT Press.

Brock, W. A.; Dechert, W. D.; Scheinkman, J. A. e LeBaron, B. (1991), *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin, Março.

Brooks, C. (1996), “Testing For Non-linearity in Daily Sterling Exchange Rates”, *Applied Financial Economics*, Vol. 6, N° 4, Agosto, 307-317.

de Lima, P. F. (1995), “Nonlinearities and Nonstationarities in Stock Returns”, Documentos de Trabalho em Economia, The John Hopkins University, Departamento de Economia.

Engle, R. F. (1982), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, Vol. 50, N° 4, 987-007.

Fama, E. (1991), “Efficient Capital Markets II”, *Journal of Finance*, Vol. XLVI, N° 5, Dezembro, 1575-1617.

Guarda, P. e Salmon, M. (1996), “Detection of nonlinearity in foreign-exchange data”, in *Nonlinear Dynamics and Economics*. Eds. William Barnett, Alan Kirman e Mark Salmon. Cambridge. Cambridge U. Press.

Hinich, M. J. (1982), “Testing for Gaussianity and Linearity in a Stationary Time Series”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 3, N° 3, 169-176.

Hinich, M. J. e Patterson, D. M. (1985), “Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 3, N° 1, 69-77.

Hinich, M. J. e Patterson, D. M. (1985), “Evidence of nonlinearity in the trade-by-trade stock market return generating process”, in Barnett, W. A.; Geweke, J. e Shell, K. (eds.), *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*, Cambridge University Press.

Hsieh, D. A. (1991), “Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets”, *Journal of Finance*, Vol. XLVI, N° 5, Dezembro, 1839-1877.

Lee, T. H.; White, H. e Granger, C. (1993), “Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models: A Comparison of Neural Networks Methods and Alternative Tests”, *Journal of Econometrics*, N° 56, 269-290.

Mendes, R. (1998), “Medidas de complexidade e auto-organização”, *mimeo*.

McCaffrey, D.; Ellner, S.; Gallant, R. e Nychka, D. (1992), “Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic system With Nonparametric Regression”, *Journal of the American Statistical Association*, Setembro, Vol. 87, N° 419, 682-695.

Nychka, D.; Ellner, S.; McCaffrey, D. e Gallant, R. (1992), “Finding Chaos in Noisy

Não Linearidade e Eficiência do Mercado Financeiro: Evidência para Portugal

Systems”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 54, N° 2, 399-426.

Omran, M. F. (1997), “Nonlinear Dependence and Conditional Heteroscedasticity in Stock Returns: UK Evidence”, *Applied Economics Letters*, Vol. 4, N° 10, 647-650.

Scheinkman, J. A. e LeBaron, B. (1989), “Nonlinear Dynamics and Stock Returns”, *Journal of Business*, Vol. 62, N° 3, 311-337.

Taylor, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*, John Wiley & Sons.

Teixeira, J. (1997), *Previsão Baseada em Modelos Neurais e de Regressão Dinâmica*, Outubro, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências de Lisboa.

Tsay, R. S. (1986), “Nonlinearity Tests for Time Series”, *Biometrika*, Vol. 73, N° 2, 461-466.

Wolf, A. (1991), *Lyapu-News: documentation for FET, a program that quantifies chaos in time series, mimeo.*

Wolf, A.; Swift, J. B.; Swinney, H. L. e Vastano, J. A. (1985), “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”, *Physica*, Vol. 16D, 285-317.

Anexo

Gráfico 1

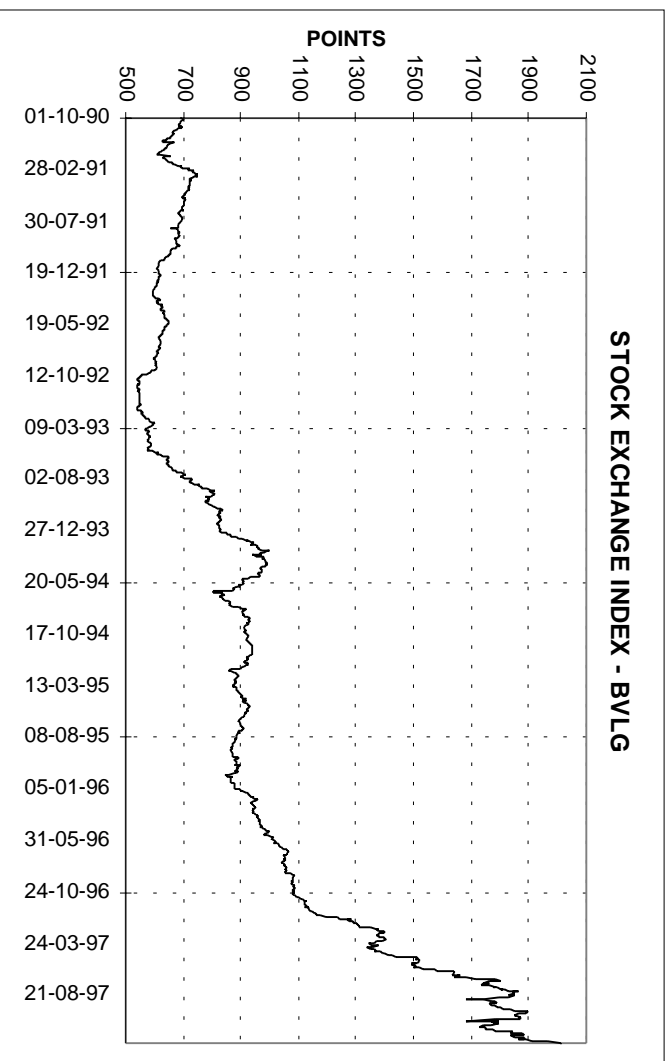


Gráfico 2

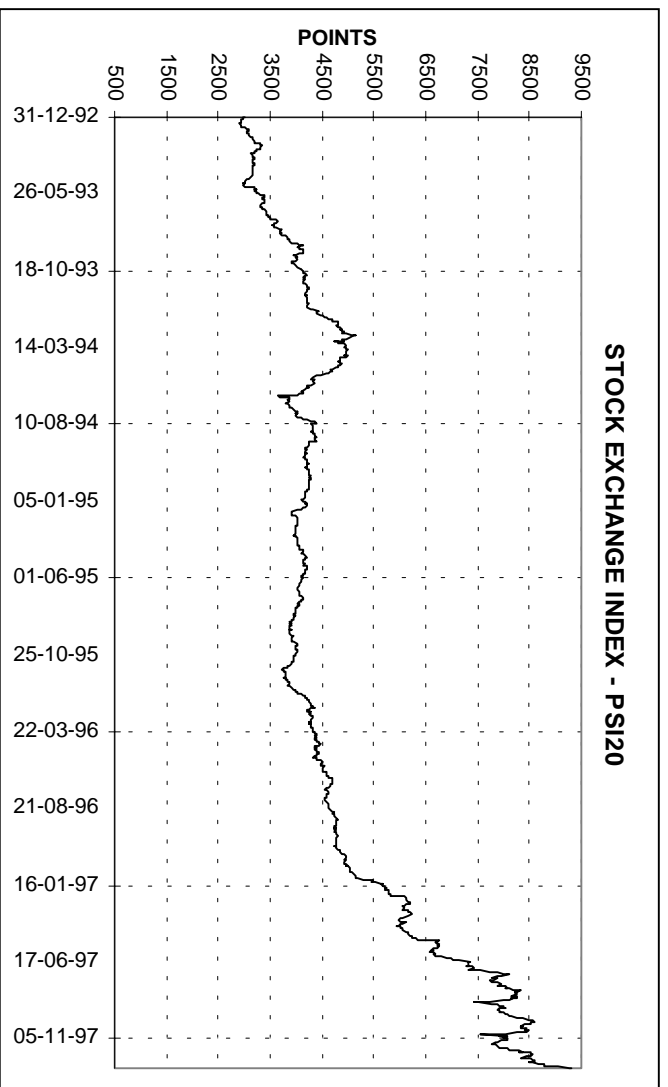


Gráfico 3

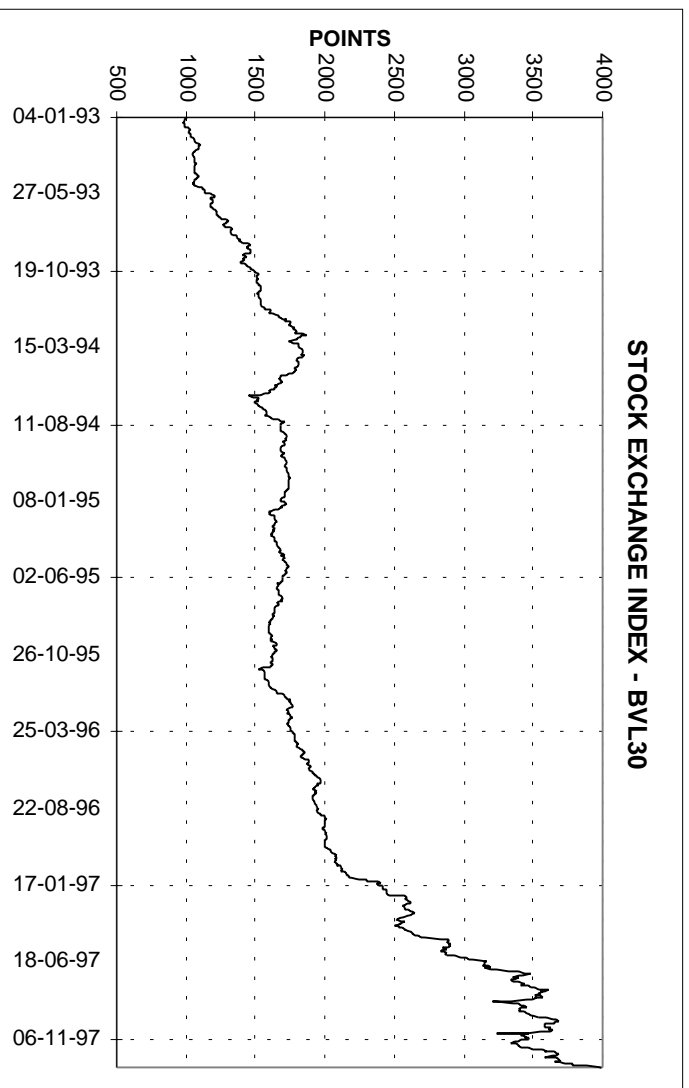


Gráfico 4

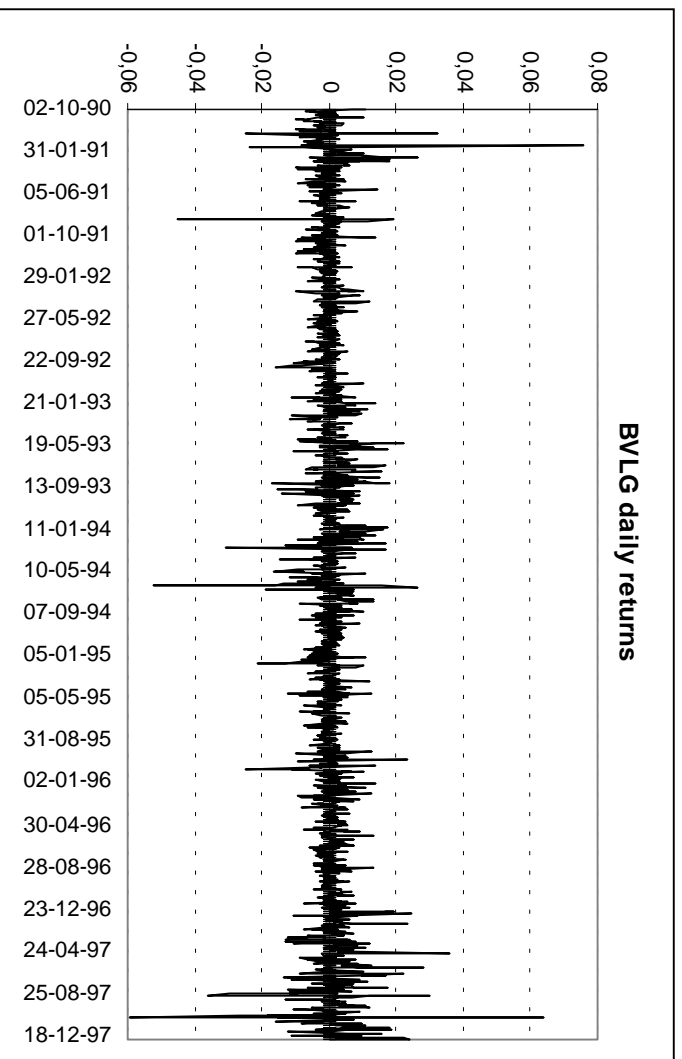


Gráfico 5

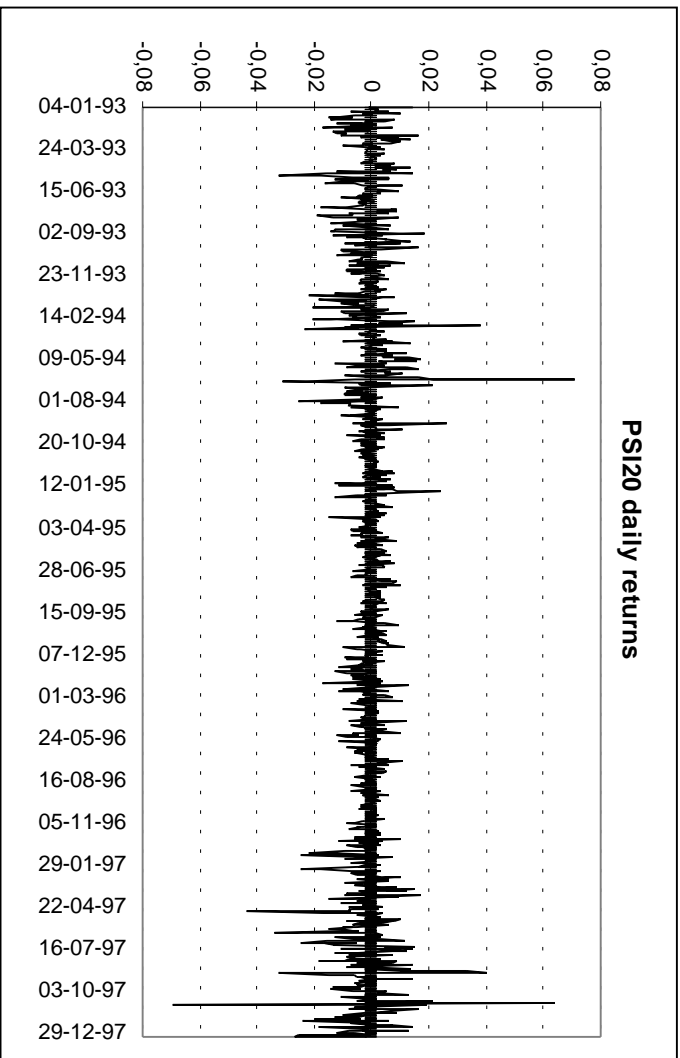
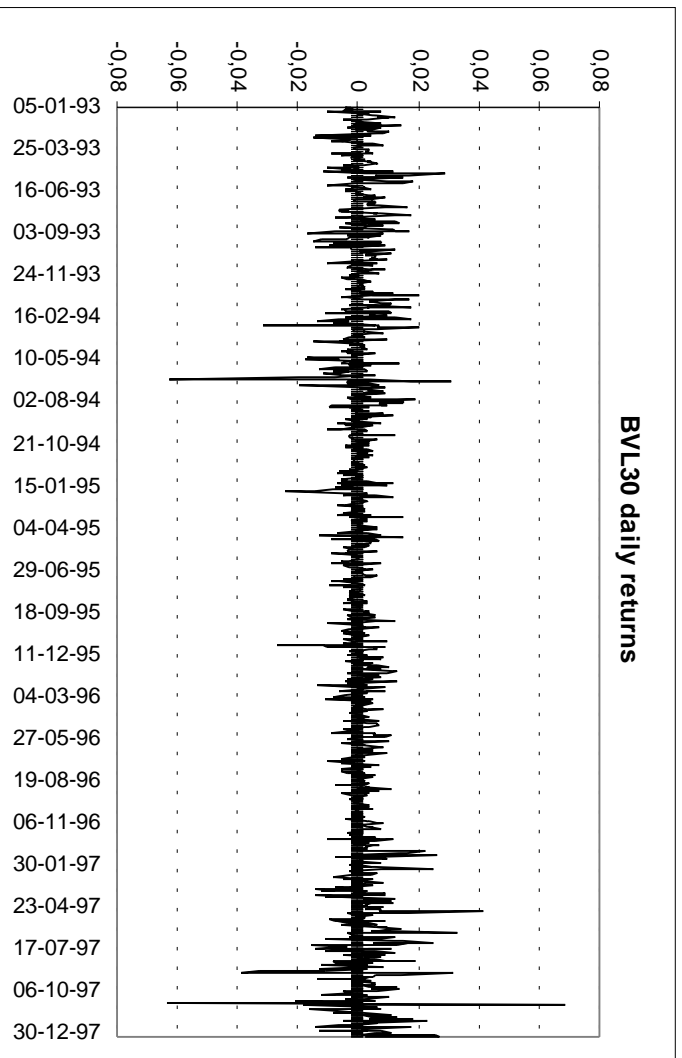


Gráfico 6



DOCUMENTOS PUBLICADOS

- 1 - Measuring job mismatch and structural unemployment in Portugal:
and empirical study using palen data
Leonor Modesto
- 2 - Perspectivas Financeiras da Seguranla Social em Portugal
Pedro Duarte Silva
- 3 - Labor Taxes and Economic Performance in Portugal
Alfredo Marvão Pereira
- 4 - Uma Análise dos Planos de Poupança Reforma
Miguel Gouveia
- 5 - Can conservatism be counterproductive?
Delegation and Fiscal Policy in a Monetary Union
Álvaro Pina
- 6 - Forecasting the Portuguese Inflation rate
Luís C. Nunes